

Aproximace funkce polynomem

Polynomial Approximation of Function

Zadání bakalářské práce

Student: **Michal Votípka**

Studijní program: B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103R031 Výpočetní matematika

Téma: **Aproximace funkce polynomem**
Polynomial Approximation of Function

Zásady pro vypracování:

V praxi se často setkáváme se situacemi, kdy je potřeba danou funkci nahradit polynomem. V práci budou nalezeny různé typy polynomiálních aproximací funkcí jedné reálné proměnné. Bude se jednat jak o lokální aproximace (vedoucí k Taylorovu polynomu), tak i o globální aproximace na daném intervalu. Tato problematika má velký význam, protože její zvládnutí nám umožňuje danou funkci (která může být obecně velmi komplikovaná) nahradit (v jistém smyslu optimálním) polynomem.

In this work we focus on finding different types of polynomial approximations of real one variable functions.

Seznam doporučené odborné literatury:

Vojtěch Jarník: Diferenciální počet I., Academia, Praha, 1984.
Vojtěch Jarník: Diferenciální počet II., Academia, Praha, 1984.

Podle pokynů vedoucího bakalářské práce.

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

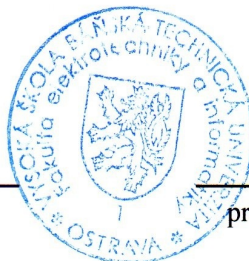
Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Petr Vodstrčil, Ph.D.**

Datum zadání: 16.11.2012

Datum odevzdání: 07.05.2013



doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry



prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 7. května 2013


.....

Rád bych na tomto místě poděkoval vedoucímu bakalářské práce Mgr. Petru Vodstrčilovi, Ph.D. za veškerou pomoc při psaní této práce a poskytnutí materiálů.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá dvěma různými způsoby, jak aproximovat funkci polynomem. První část práce se věnuje lokální aproximaci na okolí bodu, jejímž představitelem je Taylorův polynom. Druhá část pak pojednává o globální aproximaci na daném intervalu, která je řešena Lagrangeovým interpolačním polynomem. U obou těchto aproximací je odvozena chyba při aproximaci, která se dá využít v mnoha aplikacích.

Klíčová slova: aproximace, Taylorův polynom, Taylorovy řady, Lagrangeův interpolační polynom

Abstract

This bachelor thesis deals with two different ways how to approximate function by polynomial. The first part of this bachelor thesis dedicates local approximation on neighbourhood of the point that is represented by Taylor Polynomial. The other part deals with global approximation on a given interval which is solved by Lagrange Interpolating Polynomial. For both ways of approximation approximation errors are derived. They can be used in many applications.

Keywords: approximation, Taylor Polynomial, Taylor Series, Lagrange Interpolating Polynomial

Seznam použitých zkratek a symbolů

\mathbb{N}	– množina přirozených čísel
\mathbb{R}	– množina reálných čísel
$\langle \rangle$	– uzavřený interval
$()$	– otevřený interval
■	– ukončení příkladu nebo důkazu
e	– Eulerovo číslo
$f^{(n)}$	– n -tá derivace funkce f
$l'H$	– použití l'Hospitalova pravidla
$n!$	– faktoriál čísla n
$\lim_{x \rightarrow x_0}$	– limita pro x jdoucí k x_0

Obsah

1	Úvod	3
2	Taylorův polynom	4
2.1	Odvození tvaru Taylorova polynomu	6
2.2	Odvození chyby aproximace	10
2.3	Důkaz iracionality čísla e	12
2.4	Příklady - aproximace funkce pomocí Taylorova polynomu	13
2.5	Příklady - výpočet limit pomocí Taylorova polynomu	18
2.6	Taylorova řada	21
2.7	Přehled vybraných Taylorových řad	22
3	Lagrangeův interpolační polynom	23
3.1	Odvození tvaru Lagrangeova interpolačního polynomu	24
3.2	Odvození chyby aproximace	27
3.3	Chování aproximací při rostoucím řádu polynomu	30
4	Závěr	35
5	Literatura	36

Seznam obrázků

1	Taylorovy polynomy funkce $\cos x$ v bodě $x_0 = 0$	9
2	Graf aproximované funkce $f(x) = \ln(1 + 2x)$ a jejích aproximací. . .	14
3	Graf aproximované funkce $f(x) = \ln(1 + 2x)$ s garancí chyby	16
4	Aproximace funkce z poznámky 2.3	17
5	Polynom proložený třemi body	23
6	Příklady elementárních polynomů	24
7	Aproximace Lagrangeovým interpolačním polynomem	26
8	Ekvidistantní uzly	30
9	Aproximace funkce $f(x) = e^x$ na síti o 3 bodech	32
10	Aproximace funkce $f(x) = e^x$ na síti o 5 bodech	32
11	Aproximace funkce $f(x) = e^x$ na síti o 15 bodech	32
12	Aproximace funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ na síti o 10 bodech	33
13	Aproximace funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ na síti o 100 bodech	33
14	Oscilace až do řádu $1, 4 \cdot 10^7$ na síti o 100 bodech	34

1 Úvod

Jednou ze základních úloh matematické analýzy je studium aproximací funkcí. Aproximovat funkci znamená najít pro tuto funkci jinou jednodušší funkci, která bude v jistém smyslu blízká původní funkci. Tato oblast analýzy má velký význam, neboť se můžeme setkat s obecně velmi komplikovanou funkcí, kterou bude třeba nahradit funkcí méně komplikovanou.

Funkce běžně aproximujeme, i když si to ani neuvědomujeme. Už při vyčíslování funkčních hodnot goniometrických funkcí na kalkulačkách provádíme aproximaci dané funkce s nějakou omezenou přesností, což však nepředstavuje pro běžné výpočty problém.

Bakalářská práce je zaměřena na aproximaci funkcí polynomm a je rozdělena do dvou hlavních částí. V kapitole 2 si ukážeme lokální aproximaci na okolí bodu, kde si představíme aproximaci Taylorovým polynomm a odvodíme si, jak se přišlo na tvar Taylorova polynomu [1], [3]. Další významnou částí této kapitoly je odvození tvaru zbytku představující chybu, které se dopouštíme při aproximaci Taylorovým polynomm. Bez informace o této chybě by aproximace neměly takový význam, neboť bychom neměli představu o tom, s jakou přesností jsme danou funkci aproximovali. Následně si ukážeme některé aplikace Taylorova polynomu.

V kapitole 3 se budeme zabývat aproximacemi na daném intervalu, které povedou k Lagrangeovu interpolačnímu polynomm a které lze již chápat ve smyslu globálních aproximací. Takový polynom už nebudeme aproximovat na okolí jednoho bodu, nýbrž daný interval pokryjeme sítí více bodů. Tak jako v kapitole 2 i zde odvodíme tvar Lagrangeova interpolačního polynomu včetně chyby aproximace [2]. Teorie je proložena ukázkovými příklady a na závěr si ukážeme, zda jsou všechny funkce vhodné k aproximaci Lagrangeovým interpolačním polynomm a jestli je zvyšování počtu bodů (za účelem lepší aproximace) vždy optimálním řešením.

Všechny obrázky a pomocné výpočty, které jsou v této bakalářské práci uvedeny, byly vyhotoveny v programu Maple od společnosti Maplesoft, Inc.

2 Taylorův polynom

Mějme danou funkci f , kterou chceme aproximovat lokálně, tj. na nějakém okolí bodu x_0 funkcí jednodušší. Necht' funkce f je spojitá v bodě x_0 . Hledáme polynom p stupně nejvýše n -tého ($n \in \mathbb{N}$) takový, který bude danou funkci f co nejlépe aproximovat na okolí bodu x_0 . Definujme funkci R předpisem

$$R(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - p(x).$$

Funkce R představuje chybu aproximace. Protože chceme, aby chyba byla malá, je proto přirozené požádat, aby

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0, \quad (1)$$

což lze upravit

$$0 = \lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - p(x) = f(x_0) - p(x_0) \Leftrightarrow p(x_0) = f(x_0).$$

Podmínku $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0$ splňuje každý polynom, jehož graf prochází bodem $(x_0, f(x_0))$. Neboť takových polynomů je nekonečně mnoho, je potřeba podmínku (1) zpřísnit. Hledáme tedy takový polynom, kde chyba aproximace R bude v okolí bodu x_0 co nejmenší. Neboli, aby pro co největší $k \in \mathbb{N}$ platilo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^k} = 0. \quad (2)$$

V následující větě najdeme nutnou a postačující podmínku pro to, aby byla podmínka (2) splněna.

Věta 2.1 *Necht' $k \in \mathbb{N}$ a existuje konečná derivace $R^{(k)}(x_0)$, pak*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^k} = 0, \text{ právě když}$$

$$R(x_0) = R'(x_0) = R''(x_0) = \dots = R^{(k-1)}(x_0) = R^{(k)}(x_0) = 0. \quad (3)$$

Důkaz. Dokazujeme implikaci, že z (2) plyne (3). Předpokládejme sporem, že (2) platí a (3) neplatí. Uvažujme, co nejmenší $i \in \{0, \dots, k\}$ splňující $R^{(i)}(x_0) \neq 0$. To znamená

$$R(x_0) = R'(x_0) = R''(x_0) = \dots = R^{(i-1)}(x_0) = 0, R^{(i)}(x_0) \neq 0.$$

Nyní s použitím l'Hospitalova pravidla a definice derivace vyplyne

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^i} &\stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R'(x)}{i(x - x_0)^{i-1}} \stackrel{l'H}{=} \dots \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R^{(i-1)}(x)}{i(i-1)\dots 2(x - x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{i!} \cdot \frac{R^{(i-1)}(x) - R^{(i-1)}(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{i!} \cdot R^{(i)}(x_0) \neq 0. \end{aligned}$$

A na druhou stranu platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^i} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^k} \cdot (x - x_0)^{k-i} = 0,$$

což je spor.

Nyní dokážeme opačnou implikaci pomocí přímého důkazu. Zde předpokládejme, že platí (3) a chceme dokázat platnost (2). Opět s využitím l'Hospitalova pravidla a definice derivace vyplyne

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^k} &\stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R'(x)}{k(x - x_0)^{k-1}} \stackrel{l'H}{=} \dots \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R^{(k-1)}(x)}{k(k-1)\dots 2(x - x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{k!} \cdot \frac{R^{(k-1)}(x) - R^{(k-1)}(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{k!} \cdot R^{(k)}(x_0) = 0, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat. ■

2.1 Odvození tvaru Taylorova polynomu

Předpokládejme, že funkce f má potřebný počet derivací v bodě x_0 . Vzhledem k větě 2.1 stačí hledat polynom p stupně nejvýše n -tého tak, aby pro co největší $k \in \mathbb{N}$ platilo

$$\begin{aligned} R(x_0) &= f(x_0) - p(x_0) = 0, \\ R'(x_0) &= f'(x_0) - p'(x_0) = 0, \\ &\vdots \\ R^{(k)}(x_0) &= f^{(k)}(x_0) - p^{(k)}(x_0) = 0. \end{aligned}$$

- Necht' $n = 1$ (tzn. hledáme polynom nejvýše prvního stupně). Polynom p bude ve tvaru $p(x) = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Tento polynom je jednoznačně určen podmínkami

$$\begin{aligned} f(x_0) &= p(x_0) = ax_0 + b, \\ f'(x_0) &= p'(x_0) = a. \end{aligned}$$

Vyjádříme čísla a a b jako

$$\begin{aligned} a &= f'(x_0), \\ b &= f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0. \end{aligned}$$

Tím dostaneme

$$p(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Dalo se očekávat, že nejlepším polynomem prvního stupně bude tečna ke grafu funkce f v bodě $(x_0, f(x_0))$.

- Necht' $n = 2$ (tzn. hledáme polynom nejvýše druhého stupně). Polynom p bude ve tvaru $p(x) = ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$. V tomto případě je polynom p určen (jednoznačně) těmito požadavky

$$\begin{aligned} f(x_0) &= p(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c, \\ f'(x_0) &= p'(x_0) = 2ax_0 + b, \\ f''(x_0) &= p''(x_0) = 2a \end{aligned}$$

a po úpravě

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2.$$

- Necht' $n \in \mathbb{N}$ (tzn. hledáme polynom nejvýše n -tého stupně). Každý takový polynom p lze psát ve tvaru
 $p(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + \dots + a_n \cdot (x - x_0)^n$, kde $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Polynom p je nyní jednoznačně určen podmínkami

$$\begin{aligned} f(x_0) &= p(x_0) = a_0, \\ f'(x_0) &= p'(x_0) = a_1, \\ f''(x_0) &= p''(x_0) = 2a_2, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x_0) &= p^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n. \end{aligned}$$

Odkud
$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \Rightarrow$$

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n \stackrel{\text{ozn.}}{=} T_n(x),$$

tj.

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k. \quad (4)$$

Polynom T_n budeme nazývat Taylorův polynom n -tého řádu funkce f v bodě x_0 .

Nyní uvedeme větu, která nám říká, že Taylorův polynom je skutečně nejlepší k aproximaci funkce na okolí bodu. Nazvěme ji větou o nejlepší lokální aproximaci.

Věta 2.2 (O nejlepší lokální aproximaci) *Necht' f je funkce, která má v bodě x_0 konečnou derivaci n -tého řádu a necht' T_n je Taylorův polynom n -tého řádu funkce f v bodě x_0 . A dále necht' Q_n je libovolný polynom stupně nejvýše n , který je různý od T_n . Pak existuje prstencové okolí $P(x_0)$ takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ platí*

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - Q_n(x)|.$$

Důkaz. Již víme, že polynom T_n je dán jednoznačně následujícími podmínkami

$$\begin{aligned} f(x_0) &= T_n(x_0) = 0, \\ f'(x_0) &= T'_n(x_0) = 0, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x_0) &= T_n^{(n)}(x_0) = 0 \end{aligned}$$

a víme, že polynom Q_n je různý od T_n . Z toho vyplývá, že existuje $i \in \{0, \dots, n\}$ takové, že $f^{(i)}(x_0) - Q_n^{(i)}(x_0) \neq 0$. Uvažujme co nejmenší i s uvedenou vlastností. Pak platí

$$\begin{aligned} f(x_0) &= Q_n(x_0) = 0, \\ f'(x_0) &= Q'_n(x_0) = 0, \\ &\vdots \\ f^{(i-1)}(x_0) &= Q_n^{(i-1)}(x_0) = 0, \\ f^{(i)}(x_0) &= Q_n^{(i)}(x_0) \neq 0. \end{aligned}$$

Nyní aplikujeme stejné myšlenky jako při dokazování věty 2.1. A tedy s použitím l'Hospitalova pravidla a definice derivace dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - Q_n(x)}{(x - x_0)^i} &\stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - Q'_n(x)}{i(x - x_0)^{i-1}} \stackrel{l'H}{=} \dots \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(i-1)}(x) - Q_n^{(i-1)}(x)}{i(i-1)\dots 2(x - x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{i!} \cdot \frac{\left(f^{(i-1)}(x) - Q_n^{(i-1)}(x)\right) - \left(f^{(i-1)}(x_0) - Q_n^{(i-1)}(x_0)\right)}{x - x_0} = \\ &= \frac{1}{i!} \cdot \left(f^{(i)}(x_0) - Q_n^{(i)}(x_0)\right) \neq 0. \end{aligned}$$

Podobným způsobem spočteme limitu

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^i} &\stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - T'_n(x)}{i(x - x_0)^{i-1}} \stackrel{l'H}{=} \dots \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(i-1)}(x) - T_n^{(i-1)}(x)}{i(i-1)\dots 2(x - x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{i!} \cdot \frac{\left(f^{(i-1)}(x) - T_n^{(i-1)}(x)\right) - \left(f^{(i-1)}(x_0) - T_n^{(i-1)}(x_0)\right)}{x - x_0} = \\ &= \frac{1}{i!} \cdot \left(f^{(i)}(x_0) - T_n^{(i)}(x_0)\right) = 0. \end{aligned}$$

Ve větě o nejlepší lokální aproximaci figurují absolutní hodnoty. Opatřme tedy spočtené limity absolutními hodnotami. Zřejmě platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - Q_n(x)|}{|x - x_0|^i} > 0,$$

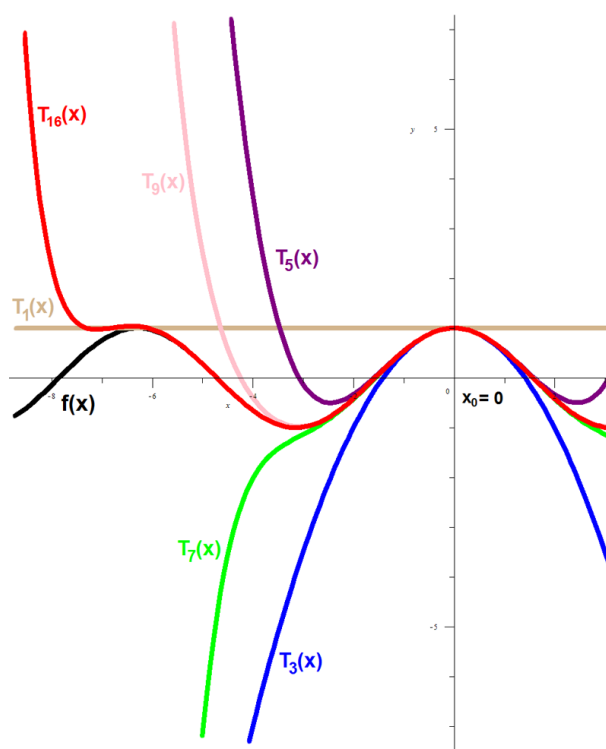
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - T_n(x)|}{|x - x_0|^i} = 0.$$

Z definice limity (viz [1]) vyplývá, že funkce s kladnou limitou na jistém prsten-covém okolí bodu x_0 bude větší, než funkce s limitou nulovou

$$\frac{|f(x) - Q_n(x)|}{|x - x_0|^i} > \frac{|f(x) - T_n(x)|}{|x - x_0|^i} \quad \Bigg/ \cdot |x - x_0|^i$$

$$|f(x) - Q_n(x)| > |f(x) - T_n(x)|.$$

■



Obrázek 1: Taylorovy polynomy funkce $\cos x$ v bodě $x_0 = 0$

2.2 Odvození chyby aproximace

Definujme zbytek R_{n+1} po n -tém členu předpisem

$$R_{n+1}(x) = f(x) - T_n(x). \quad (5)$$

Zbytek po n -tém členu nám vyjadřuje, jaké chyby jsme se pro daný stupeň aproximace polynomem dopustili.

Vzhledem k tomu, jak byl Taylorův polynom konstruován, tak platí, že derivace R_{n+1} jsou v bodě x_0 nulové až do n -tého řádu. Pak můžeme použít větu 2.1, která říká, že

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_{n+1}(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Označme výraz $\frac{R_{n+1}(x)}{(x - x_0)^n}$ jako $\alpha(x)$. Odtud lze snadno vyjádřit

$$R_{n+1}(x) = \alpha(x) \cdot (x - x_0)^n, \quad (6)$$

kde

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

Jinými slovy zbytek R_{n+1} se dá vyjádřit jako součin $(x - x_0)^n$ a nějaké funkce $\alpha(x)$, která se blíží k nule. Čímž jsme získali jakousi prvotní informaci o zbytku, která však není vždy postačující. Přesnější znění udává Taylorova věta.

Věta 2.3 (Taylorova) *Nechť v nějakém okolí $U(x_0, \delta)$ existuje konečná $(n + 1)$ -ní derivace funkce f a necht' $x \in P(x_0, \delta)$. Pak existuje ξ ležící mezi body x a x_0 takové, že*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}. \quad (7)$$

Poznámka 2.1 Výraz $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$ se nazývá Lagrangeův tvar zbytku.

Důkaz. Necht' $x \in P(x_0, \delta)$ je libovolné, ale pevné, vystupující zde jako konstanta. Ze vztahů (4), (5) plyne

$$R_{n+1}(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)}{1!} - \dots - f^{(n)}(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^n}{n!}.$$

Definujme funkci F proměnné t předpisem

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t) \cdot \frac{(x-t)}{1!} - f''(t) \cdot \frac{(x-t)^2}{2!} - \dots - f^{(n)}(t) \cdot \frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Je zřejmé, že $F(x) = 0$, $F(x_0) = R_{n+1}(x)$. V uzavřeném intervalu J s krajními body x_0 a x má funkce F derivaci

$$\begin{aligned} F'(t) = & -f'(t) - \left(-f'(t) + f''(t) \cdot \frac{(x-t)}{1!} \right) - \left(-f''(t) \cdot \frac{(x-t)}{1!} + f'''(t) \cdot \frac{(x-t)^2}{2!} \right) - \\ & - \dots - \left(-f^{(n)}(t) \cdot \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n+1)}(t) \cdot \frac{(x-t)^n}{n!} \right). \end{aligned}$$

Po odečtení většiny členů bude mít derivace funkce F následující tvar

$$F'(t) = -f^{(n+1)}(t) \cdot \frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Jelikož má funkce F v J konečnou derivaci, je funkce F v J spojitá. Necht' φ je funkce spojitá v J , která má v každém vnitřním bodě tohoto intervalu derivaci různou od nuly. Pak dle Cauchyovy věty o střední hodnotě (viz [1]) existuje uvnitř intervalu J číslo ξ takové, že

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \text{ tj. } -R_{n+1}(x) = -\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{(x-\xi)^n}{n!}.$$

Zde můžeme podotknout, že jsme využili rovností $F(x) = 0$ a $F(x_0) = R_{n+1}(x)$.

Volbou $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, $\varphi'(t) = -(n+1)(x-t)^n$ dostaneme

$$R_{n+1}(x) = -\frac{0 - (x-x_0)^{n+1}}{(n+1) \cdot (x-\xi)^n} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{(x-\xi)^n}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1},$$

což je Lagrangeův tvar zbytku (7). ■

Poznámka 2.2 Jinou volbou φ dostaneme další předpis pro tvar zbytku.

Například volba $\varphi(t) = t$ nám dává tzv. Cauchyův tvar zbytku

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x-x_0)(x-\xi)^n.$$

2.3 Důkaz iracionality čísla e

Pro důkaz budeme potřebovat tvar Taylorova polynomu (4) a Taylorovu větu (věta 2.3). Napišme funkci $f(x) = e^x$ v bodě $x_0 = 0$ jako součet Taylorova polynomu T_n a zbytku R_{n+1}

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (8)$$

kde ξ bude ležet mezi 0 a x .

Věta 2.4 Číslo e je iracionální.

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že

$$e = \frac{p}{q},$$

kde čísla $p, q \in \mathbb{N}$ (to je možné, neboť $e > 0$). Nyní v rovnosti (8) položíme $x = -1$ a $n = p$. Odtud máme existenci čísla $\xi \in (-1, 0)$ takového, že

$$e^{-1} = \frac{q}{p} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^p}{p!} + \frac{e^\xi \cdot (-1)^{p+1}}{(p+1)!}.$$

Vynásobme poslední vztah členem $(p+1)!$ a upravme

$$\left| (p+1)! \cdot \frac{q}{p} - (p+1)! \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^p}{p!} \right) \right| = |e^\xi \cdot (-1)^{p+1}| = e^\xi.$$

Výraz v první absolutní hodnotě bude jistě celé číslo. Protože $\xi < 0$, tak $e^\xi \in (0, 1)$, což je spor. ■

2.4 Příklady - aproximace funkce pomocí Taylorova polynomu

Příklad 2.1

Uvažujme funkci $f(x) = \ln(1 + 2x)$. Nalezněte Taylorův polynom 3. řádu v bodě $x_0 = \frac{1}{2}$.

Jestliže požadujeme Taylorův polynom 3. řádu, budeme pro výpočet potřebovat třetí derivaci funkce f (samozřejmě i první a druhou)

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1 + 2x), \\ f'(x) &= \frac{2}{1 + 2x}, \\ f''(x) &= \frac{-4}{(1 + 2x)^2}, \\ f'''(x) &= \frac{16}{(1 + 2x)^3}. \end{aligned}$$

Nyní dosadíme bod x_0 do jednotlivých derivací funkce f

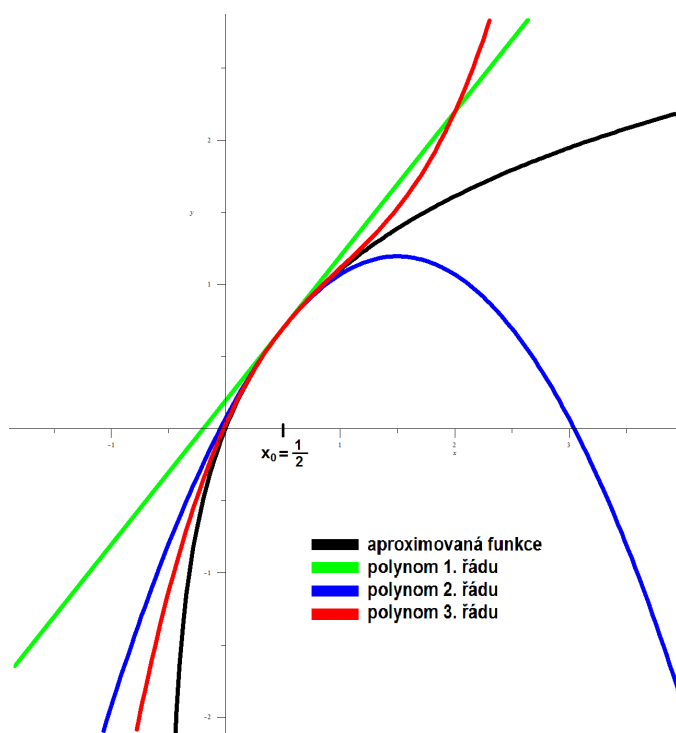
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2, \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad f''\left(\frac{1}{2}\right) = -1, \quad f'''\left(\frac{1}{2}\right) = 2.$$

Zapíšeme obecný tvar pro Taylorův polynom 3. řádu a dosadíme

$$\begin{aligned} T_3(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 = \\ &= \ln 2 + \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{2}\right)^3. \end{aligned}$$

Tímto jsme dostali konečný tvar Taylorova polynomu 3. řádu v bodě $x_0 = \frac{1}{2}$.

Na následujícím obrázku (obrázek 2) lze vidět, na kolik se polynom přibližuje k zadané funkci. Jsou zde i znázorněny grafy Taylorových polynomů prvního a druhého řádu.



Obrázek 2: Graf aproximované funkce $f(x) = \ln(1 + 2x)$ a jejích aproximací.

■

Příklad 2.2

Mějme zadanou funkci $f(x) = \ln(1 + 2x)$. Úkolem je aproximovat funkci f Taylorovým polynomem neznámého řádu v bodě $x_0 = \frac{1}{2}$ tak, aby chyba R této aproximace na intervalu $\langle \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \rangle$ nepřekročila hodnotu 10^{-2} . Určeme tento řád.

První věc, kterou musíme určit, je obecný tvar Taylorova polynomu n -tého řádu, protože dopředu nevíme, jaký řád aproximace budeme potřebovat. Nalézt takový polynom, nemusí být obecně vůbec jednoduché. Avšak zde vzhledem k charakteru derivací z příkladu 2.1 lze snadno zjistit, jak bude vypadat n -tá derivace funkce f

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2^n \cdot (n-1)!}{(1+2x)^n}.$$

Tu pak zbývá dosadit do obecného tvaru Taylorova polynomu a po úpravách dostáváme Taylorův polynom n -tého řádu pro funkci f v bodě $x_0 = \frac{1}{2}$

$$T_n(x) = \ln 2 + \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^n}{n}.$$

Zopakujme Lagrangeův tvar zbytku (7) a dosadíme do něj $(n+1)$ -ní derivaci funkce f (její n -tou derivaci již známe)

$$\left(\forall x \in \left\langle \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\rangle\right) \left(\exists \xi \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\right) :$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} = \frac{(-1)^n \cdot 2^{n+1} \cdot n!}{(1 + 2\xi)^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Hledáme odhad absolutní hodnoty chyby na intervalu $\langle \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \rangle$. Platí $|x - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{4}$. Dále $\xi > \frac{1}{4}$, pak zcela jistě $(1 + 2\xi)^{n+1} > \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$. Máme tedy

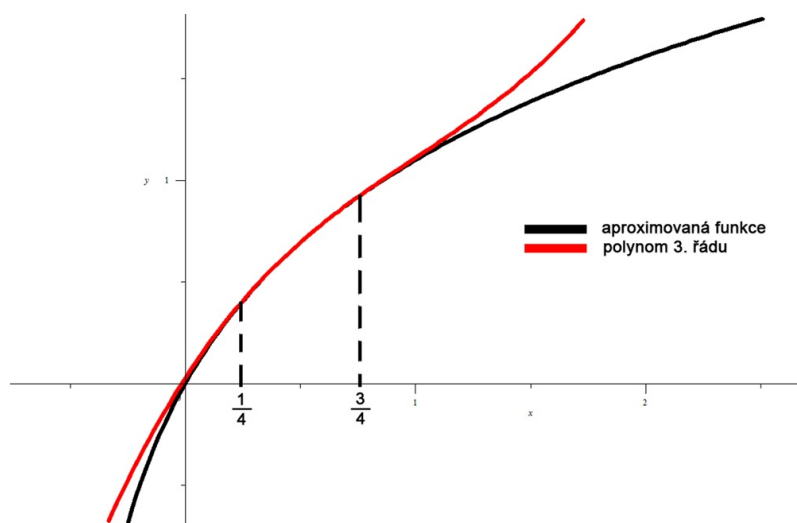
$$\begin{aligned} |R_{n+1}(x)| &= \frac{2^{n+1}}{(1 + 2\xi)^{n+1} \cdot (n+1)} \cdot \left|x - \frac{1}{2}\right|^{n+1} \leq \frac{2^{n+1}}{(1 + 2\xi)^{n+1} \cdot (n+1)} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = \\ &= \frac{1}{(n+1) \cdot (1 + 2\xi)^{n+1} \cdot 2^{n+1}} < \frac{1}{(n+1) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{(n+1) \cdot 3^{n+1}}. \end{aligned}$$

Aby byla chyba menší než 10^{-2} , stačí zvolit $n = 3$, neboť $\frac{1}{4 \cdot 3^4} < 10^{-2}$.

Požadovaný Taylorův polynom má tedy tvar

$$T_3(x) = \ln 2 + \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{2}\right)^3.$$

Pro bližší představu je uveden obrázek (obrázek 3).



Obrázek 3: Graf aproximované funkce $f(x) = \ln(1 + 2x)$ s garancí chyby

■

Příklad 2.3

Pomocí Taylorova polynomu funkce $f(x) = e^x$ v bodě $x_0 = 0$ vypočtěme číslo e tak, aby chyba nepřesáhla hodnotu 10^{-6} .

Vyjádřeme si nejprve funkci f v bodě $x_0 = 0$ jako součet Taylorova polynomu T_n a zbytku R_{n+1}

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (9)$$

kde ξ leží mezi body 0 a x .

Ve vztahu (9) položíme $x = 1$. Pak bude výše zmíněné $\xi \in (0, 1)$. Můžeme tedy odhadnout chybu

$$\begin{aligned} |R_{n+1}(x)| &= \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \cdot |x - x_0|^{n+1} = \frac{e^\xi \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^\xi}{(n+1)!} < \\ &< \frac{e}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Pro chybu menší než 10^{-6} je postačující zvolit Taylorův polynom řádu $n = 9$, neboť $\frac{e}{10!} < 10^{-6}$.

Taylorův polynom bude ve tvaru

$$T_9(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!}$$

a hledaná aproximace čísla e má tvar

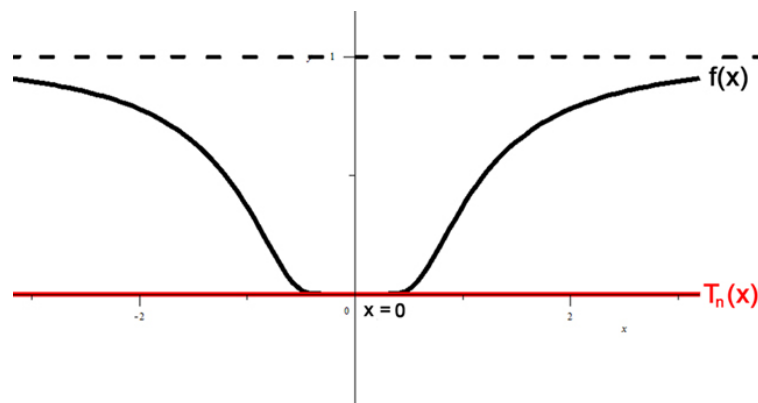
$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} \approx 2,718281526.$$

■

Poznámka 2.3 Ne vždy však musí být zadaná funkce vhodná k aproximaci

Taylorovým polynomem. Pro ukázkou u následující funkce $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$,

kde $x_0 = 0$ se stane, že pokud napočítáme jednotlivé derivace podle definice derivace, tak všechny vyjdou v bodě x_0 nulové. Zde by se dalo očekávat, že budeme-li navyšovat stupeň polynomu, tak se budeme v jistém smyslu přibližovat k aproximované funkci. Ale právě kvůli specifickému chování derivací, tomu tak nebude a grafem Taylorova polynomu libovolného řádu v bodě x_0 bude přímka totožná s osou x (viz obrázek 4).



Obrázek 4: Aproximace funkce z poznámky 2.3

2.5 Příklady - výpočet limit pomocí Taylorova polynomu

Taylorův polynom lze využít i při výpočtu limit, přičemž k vyjádření tvaru zbytku se používá vztah (6). Tvar zbytku (7) uvedený v Taylorově větě (viz věta 2.3) by šel použít také, ale výpočty by se zbytečně komplikovaly.

Příklad 2.4

Pomocí Taylorova polynomu spočítejme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

Pro výpočet budeme potřebovat vyjádřit funkci $\sin x$ pomocí Taylorova polynomu 3. řádu v bodě 0

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}.$$

Zároveň víme, že

$$\sin x = T_3(x) + R(x),$$

kde k vyjádření zbytku použijeme vzorec (6). Platí tedy

$$R(x) = \alpha(x) \cdot x^3, \quad \text{kde } \lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0.$$

Vše potřebné k výpočtu limity již máme a tedy můžeme psát

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \alpha(x) \cdot x^3\right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cdot \left(\frac{1}{6} - \alpha(x)\right)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{6} - \alpha(x)\right) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

■

Příklad 2.5

Využijme Taylorův polynom k výpočtu $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$.

Nejprve musíme naši limitu převést na limitu v nule, a to substitucí $y = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}) &= \lim_{y \rightarrow 0_+} \left(\sqrt[6]{\frac{1}{y^6} + \frac{1}{y^5}} - \sqrt[6]{\frac{1}{y^6} - \frac{1}{y^5}} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0_+} \left(\sqrt[6]{\frac{1+y}{y^6}} - \sqrt[6]{\frac{1-y}{y^6}} \right) = \lim_{y \rightarrow 0_+} \frac{\sqrt[6]{1+y} - \sqrt[6]{1-y}}{y}. \end{aligned}$$

Vyjádříme si jednotlivé funkce z limity. Vzhledem k jmenovateli nám postačí Taylorův polynom 1. řádu v bodě 0

$$\sqrt[6]{1+y} = 1 + \frac{1}{6}y + R(y) \Rightarrow R(y) = \alpha(y) \cdot y,$$

$$\sqrt[6]{1-y} = 1 - \frac{1}{6}y + R(y) \Rightarrow R(y) = \beta(y) \cdot y,$$

kde $\lim_{y \rightarrow 0} \alpha(y) = 0$ a $\lim_{y \rightarrow 0} \beta(y) = 0$.

Dosadíme do limity a spočteme

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0_+} \frac{\sqrt[6]{1+y} - \sqrt[6]{1-y}}{y} &= \lim_{y \rightarrow 0_+} \frac{1 + \frac{1}{6}y + \alpha(y) \cdot y - (1 - \frac{1}{6}y + \beta(y) \cdot y)}{y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1}{3}y + \alpha(y) \cdot y - \beta(y) \cdot y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0_+} \left(\frac{1}{3} + \alpha(y) - \beta(y) \right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

■

Příklad 2.6

Pomocí Taylorova polynomu spočítejme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

Tentokrát pro výpočet budeme potřebovat vyjádřit funkci $\cos x$ pomocí Taylorova polynomu 4. řádu v bodě 0

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + R(x) \Rightarrow R(x) = \alpha(x) \cdot x^4,$$

$$\text{kde } \lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0.$$

Nyní přistoupíme k vyjádření funkce $e^{-\frac{x^2}{2}}$ pomocí Taylorova polynomu 4. řádu. K tomu stačí, vyjádříme-li funkci e^y pomocí Taylorova polynomu 2. řádu

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + R(y) \Rightarrow R(y) = \beta(y) \cdot y^2,$$

$$\text{kde } \lim_{y \rightarrow 0} \beta(y) = 0.$$

Použijeme substituci $y = -\frac{x^2}{2}$ a dosadíme

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \beta\left(-\frac{x^2}{2}\right) \cdot \frac{x^4}{4}.$$

Označme si výraz $\beta\left(-\frac{x^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{4}$ jako $\gamma(x)$. Pak (podle věty o limitě složené funkce)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \gamma(x) = 0.$$

A můžeme psát

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \alpha(x) \cdot x^4 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \gamma(x) \cdot x^4\right)}{x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^4}{12} + \alpha(x) \cdot x^4 - \gamma(x) \cdot x^4}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 \left(-\frac{1}{12} + \alpha(x) - \gamma(x)\right)}{x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{12} + \alpha(x) - \gamma(x)\right) = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

■

2.6 Taylorova řada

Definice 2.1 Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 derivace všech řádů. Pak výraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

nazýváme Taylorovou řadou funkce f v bodě x_0 .

Zde nastává zásadní otázka, jestli když si k dané funkci f napíšeme příslušnou Taylorovu řadu, tak zda tato řada opravdu bude konvergovat k funkci f . Odpověď na tuto otázku nám dává následující věta.

Věta 2.5 Necht' f je funkce, která má v bodě x_0 derivace všech řádů, a $x \in \mathbb{R}$. Pak platí, že

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n \text{ právě tehdy, když } \lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0,$$

kde výraz R_{n+1} je zbytek po n -tém členu (viz (5)).

Důkaz. Z definice součtu řady (viz [4]) vyplývá, že

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k.$$

Výraz v limitě představuje vyjádření Taylorova polynomu T_n (viz (4)), který lze dále vyjádřit z předpisu (5). Pak můžeme psát

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - R_{n+1}(x)] = f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x),$$

odkud dostaneme tvrzení věty.

■

2.7 Přehled vybraných Taylorových řad

Nyní uvedeme příklady Taylorových řad vybraných funkcí v bodě $x_0 = 0$ včetně oborů konvergence

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

$$(\forall x \in (-1, 1)) : \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots,$$

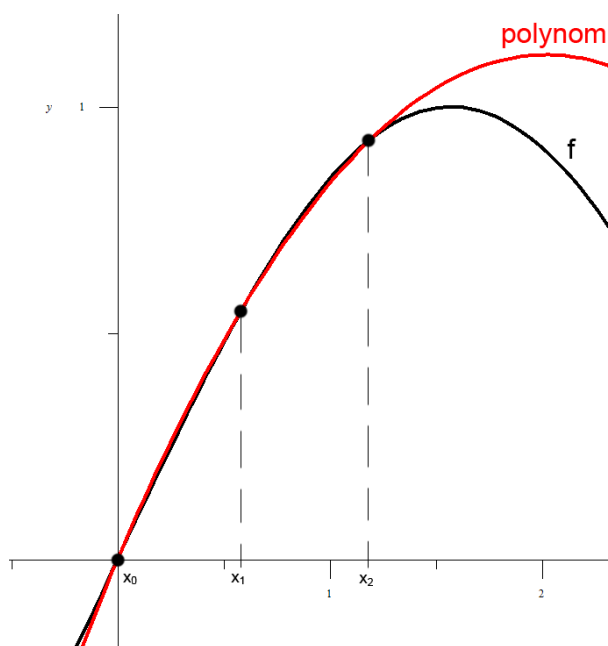
$$(\forall x \in (-1, 1)) : \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots.$$

3 Lagrangeův interpolační polynom

Ne vždy budeme chtít aproximovat funkci pouze na okolí bodu x_0 . Nastanou situace, kdy budeme mít danou funkci f definovanou na intervalu $\langle a, b \rangle$. V tomto intervalu vybereme body $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Cílem bude najít polynom P stupně nejvýše n takový, že platí

$$\begin{aligned} P(x_0) &= f(x_0), \\ P(x_1) &= f(x_1), \\ &\vdots \\ P(x_n) &= f(x_n). \end{aligned}$$

Takovému polynomu budeme říkat Lagrangeův interpolační polynom a bodům x_0, x_1, \dots, x_n body (uzly) interpolace.



Obrázek 5: Polynom proložený třemi body

3.1 Odvození tvaru Lagrangeova interpolačního polynomu

Zaměřme se nyní na to, jak takový polynom získáme. Polynom P lze hledat ve tvaru vhodné lineární kombinace tzv. elementárních Lagrangeových polynomů (obrázek 6). Elementární Lagrangeův polynom p_j je takový polynom stupně n , splňující

$$\begin{aligned} p_j(x_i) &= 0 \quad \text{pro } i \neq j, \\ p_j(x_j) &= 1. \end{aligned}$$

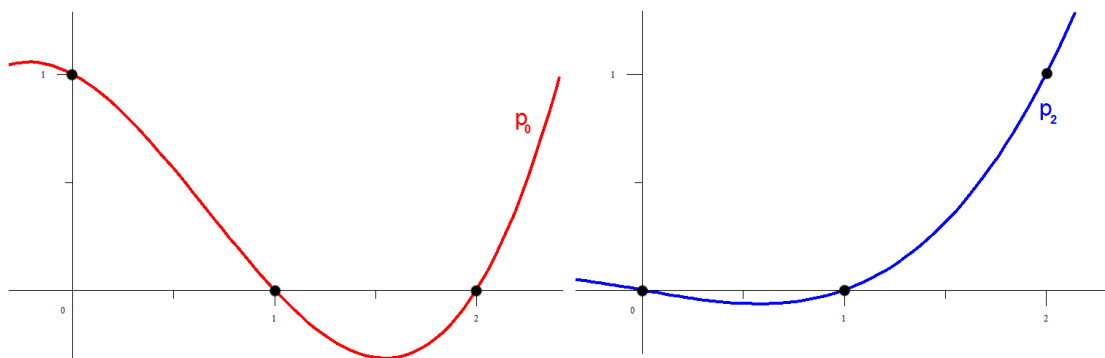
Z první podmínky vyplývá, že body $x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ jsou kořeny polynomu p_j . Odtud

$$p_j(x) = \alpha \cdot (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n).$$

Neznámý koeficient α vyjádříme z druhé podmínky $p_j(x_j) = 1$

$$1 = p_j(x_j) = \alpha \cdot (x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n),$$

$$\alpha = \frac{1}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_n)}.$$



Obrázek 6: Příklady elementárních polynomů

Jelikož již známe člen α , můžeme vyčíslit polynom p_j jako

$$p_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}, \quad (10)$$

kde $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Jak již bylo zmíněno, hledaný polynom P bude lineární kombinací elementárních Lagrangeových polynomů. Přesněji řečeno

$$P(x) = f(x_0) \cdot p_0(x) + f(x_1) \cdot p_1(x) + \dots + f(x_n) \cdot p_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \cdot p_j(x). \quad (11)$$

Polynom P má tyto dvě vlastnosti:

1. P je polynom stupně nejvýše n -tého.
2. $P(x_j) = f(x_j)$ pro $j \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Ukažme, že existuje právě jeden polynom, který má výše uvedené dvě vlastnosti. Nechť Q je polynom s vlastnostmi 1, 2. Platí tedy, že

$$P(x_j) = Q(x_j) \quad \text{pro } j \in \{0, 1, \dots, n\}. \quad (12)$$

Dále definujeme polynom $S(x) = P(x) - Q(x)$, který je stupně nejvýše n a pro který platí $S(x_j) = P(x_j) - Q(x_j) = 0$, kde $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Polynom S má tedy více než n kořenů, a proto musí být nulový. To znamená, že $P(x) = Q(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 3.1

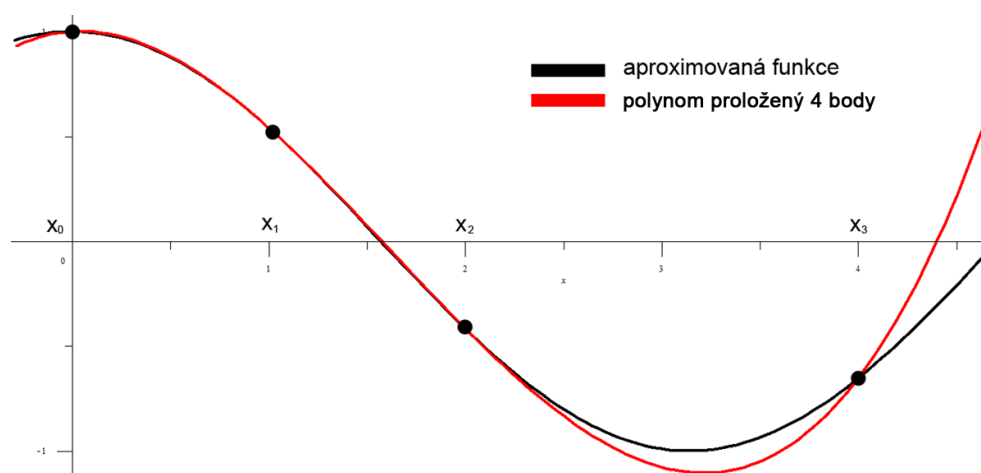
Máme danou funkci $f(x) = \cos x$ na intervalu $\langle 0, 5 \rangle$, ve kterém jsou dány tyto body: $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$. V daných bodech aproximujme funkci f Lagrangeovým interpolačním polynomem.

Jsou-li zadány 4 interpolační body, stupeň polynomu bude nejvýše $n = 3$. Sestavme tedy jednotlivé elementární Lagrangeovy polynomy

$$\begin{aligned} p_0(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)} = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{7}{8}x^2 - \frac{7}{4}x + 1, \\ p_1(x) &= \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)} = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{3}x, \\ p_2(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)} = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - x, \\ p_3(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)} = \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{12}x. \end{aligned}$$

Nyní již zbývá dosadit jednotlivé elementární polynomy do vzorce (11)

$$\begin{aligned}
 P(x) &= \sum_{j=0}^3 f(x_j) \cdot p_j(x) = \cos 0 \cdot \left(-\frac{1}{8}x^3 + \frac{7}{8}x^2 - \frac{7}{4}x + 1 \right) + \cos 1 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{3}x \right) - \\
 &\quad - \cos 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - x \right) - \cos 4 \cdot \left(\frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{12}x \right) \approx \\
 &\quad \approx 0,131892x^3 - 0,644025x^2 + 0,05243x + 1.
 \end{aligned}$$



Obrázek 7: Aproximace Lagrangeovým interpolačním polynomem

Pro nástin výsledku je uveden graf (obrázek 7) znázorňující aproximovanou funkci a její Lagrangeův interpolační polynom na zadaných čtyřech bodech.

■

3.2 Odvození chyby aproximace

Z obrázku 7 lze vypožorovat, že výsledný polynom skutečně prochází zadanými body. Pokud se však podíváme na průběh polynomu v rámci celého intervalu, tak zjistíme, že se místy značně liší od aproximované funkce. Neboli lze říci, že se dopouštíme nějaké chyby. Otázkou je, jak je tato chyba velká.

Než se dostaneme k větě o chybě, musíme nejprve uvést jedno pomocné tvrzení.

Lemma 3.1 *Necht' $n \in \mathbb{N}$ a funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ má tyto vlastnosti:*

- I.** *Funkce f je spojitá v $\langle a, b \rangle$ a má vlastní n -tou derivaci $f^{(n)}(x)$ v každém vnitřním bodě intervalu $\langle a, b \rangle$.*
- II.** *Funkce f je rovna nule alespoň v $n + 1$ různých bodech intervalu $\langle a, b \rangle$, tj. existují čísla x_0, x_1, \dots, x_n taková, že*

$$\begin{aligned} a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b, \\ f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n) = 0. \end{aligned}$$

Pak existuje alespoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $f^{(n)}(\xi) = 0$.

Důkaz. Mějme danou funkci f na intervalu $\langle a, b \rangle$ a v něm body x_0, x_1, \dots, x_n , ve kterých je funkce f nulová. Tyto body nám mezi sebou vytyčují intervaly. Takových intervalů je n . V krajních bodech těchto intervalů jsou funkční hodnoty funkce f nulové. Na každém z těchto n intervalů aplikujeme Rolleovu větu (viz [2]).

Rolleova věta nám říká, že v každém z těchto intervalů existuje minimálně jeden bod, kde je nulová derivace, tzn. f' pak má minimálně n nulových bodů. A celý postup se opakuje, až dojdeme k n -té derivaci funkce f , která bude mít minimálně jeden nulový bod. Takže pomocná věta (lemma 3.1) je důsledkem toho, že mnohokrát za sebou použijeme Rolleovu větu. ■

Definujme nyní chybu aproximace jako

$$R(x) = f(x) - P(x), \tag{13}$$

kde $x \in \langle a, b \rangle$ a P je Lagrangeův interpolační polynom (stupně nejvýše n) příslušný k funkci f a bodům x_0, x_1, \dots, x_n . Následující věta udává odhad této chyby.

Věta 3.1 *Nechť existuje konečná $(n + 1)$ -ní derivace funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak ke každému $x \in \langle a, b \rangle$ existuje číslo $\xi \in (a, b)$ takové, že*

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0) \dots (x - x_n), \quad (14)$$

kde x_0, x_1, \dots, x_n jsou uzly interpolace.

Důkaz. Jistě platí, že chyba v uzlových bodech je nulová, tzn. $R(x_j) = 0$ pro $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Zvolme pevně $x \in \langle a, b \rangle$, různé od x_0, x_1, \dots, x_n a definujme funkci F proměnné t , kde $t \in \langle a, b \rangle$ předpisem

$$F(t) = (x - x_0) \dots (x - x_n) \cdot R(t) - (t - x_0) \dots (t - x_n) \cdot R(x).$$

Dosazením bodů x_0, x_1, \dots, x_n, x do funkce F lze ověřit, že platí

$$F(x_0) = 0, F(x_1) = 0, \dots, F(x_n) = 0, F(x) = 0.$$

Vzhledem k předpokladům existuje $(n + 1)$ -ní derivace funkce F , která má následující tvar

$$F^{(n+1)}(t) = (x - x_0) \dots (x - x_n) \cdot R^{(n+1)}(t) - (n + 1)! \cdot R(x). \quad (15)$$

Pak podle pomocné věty (lemma 3.1)

$$(\exists \xi \in (a, b)) : F^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Dosadíme do (15) místo proměnné t číslo ξ a dostaneme

$$0 = F^{(n+1)}(\xi) = (x - x_0) \dots (x - x_n) \cdot R^{(n+1)}(\xi) - (n + 1)! \cdot R(x).$$

Neboť $F^{(n+1)}$ je nulová v každém bodě intervalu $\langle a, b \rangle$, tak $R^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$. Nyní zbývá vyjádřit chybu aproximace

$$\begin{aligned} 0 &= (x - x_0) \dots (x - x_n) \cdot f^{(n+1)}(\xi) - (n + 1)! \cdot R(x), \\ R(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} \cdot (x - x_0) \dots (x - x_n). \end{aligned}$$

■

Příklad 3.2

Použijeme body i funkci z předcházejícího příkladu (příklad 3.1). Mějme danou funkci $f(x) = \cos x$ na intervalu $\langle 0, 5 \rangle$, ve kterém jsou dány tyto body: $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$. V daných bodech aproximujme funkci f Lagrangeovým interpolačním polynomem a určíme, jaké chyby jsme se na tomto intervalu dopustili.

Minulý příklad jsme ukončili tím, že jsme se dopustili nějaké chyby, ale nevěděli jsme, jak byla velká. Přeskočíme výpočet, jak takový Lagrangeův interpolační polynom vypadá, neboť to už víme. Přesuneme se rovnou k chybě.

Budeme potřebovat $(n + 1)$ -ní derivaci funkce f : $f^{(4)}(x) = \cos x$ a dosadíme do vzorce pro chybu (14)

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = \\ &= \frac{\cos \xi}{4!} \cdot (x - 0)(x - 1)(x - 2)(x - 4). \end{aligned}$$

Uděláme odhad $\cos \xi$, kde $\xi \in (0, 5)$. Je zřejmé, že $|\cos \xi| \leq 1$. Pro $\forall x \in \langle 0, 5 \rangle$ platí

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{\cos \xi}{4!} \cdot (x - 0)(x - 1)(x - 2)(x - 4) \Rightarrow \\ \Rightarrow |R(x)| &= \frac{|\cos \xi|}{24} \cdot |x \cdot (x - 1)(x - 2)(x - 4)| \leq \\ &\leq \frac{1}{24} \cdot |x \cdot (x - 1)(x - 2)(x - 4)|. \end{aligned}$$

Ještě je třeba určit maximální hodnotu zbylého výrazu s absolutní hodnotou na intervalu $\langle 0, 5 \rangle$, k čemuž jsme použili program Maple

$$\max_{x \in \langle 0, 5 \rangle} |x \cdot (x - 1)(x - 2)(x - 4)| = |5 \cdot (5 - 1)(5 - 2)(5 - 4)| = 60.$$

Zbývá dosadit a vyjádřit odhad chyby aproximace

$$|R(x)| \leq \frac{1}{24} \cdot 60 = \frac{5}{2}.$$

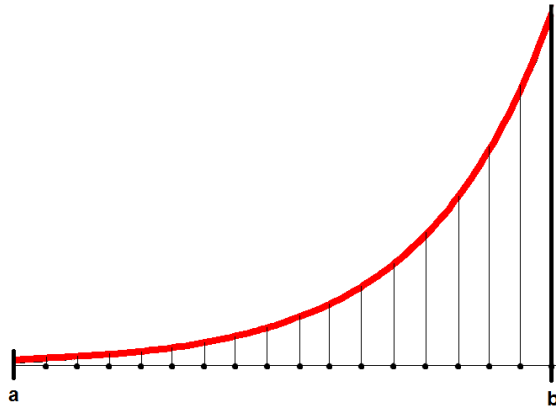
■

3.3 Chování aproximací při rostoucím řádu polynomu

Mějme danou funkci f na intervalu $\langle a, b \rangle$, ve kterém vezmeme pravidelnou síť bodů. Tyto body se nazývají jako tzv. ekvidistanční uzly, pro které platí

$$x_k = a + k \cdot \frac{b - a}{n},$$

kde $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Představme si, že tuto síť bodů budeme zhušťovat a těmito body proložíme Lagrangeův interpolační polynom. Zde se pak nabízí zajímavá otázka. Zda-li se chyba aproximace R bude zmenšovat a my se postupně budeme blížit k původní funkci. Ukažme si, jak to bude vypadat u konkrétní funkce.



Obrázek 8: Ekvidistanční uzly

Máme danou funkci $f(x) = e^x$ a obecný interval $\langle a, b \rangle$. Na tomto intervalu vyrobíme síť ekvidistančních uzlů, kterou budeme postupně zhušťovat ($n \rightarrow \infty$). Podle věty 3.1 dokážeme odhadnout chybu

$$(\forall x \in \langle a, b \rangle) (\exists \xi \in (a, b)) : |R(x)| = \frac{e^\xi}{(n+1)!} \cdot |(x - x_0) \dots (x - x_n)|,$$

kde výraz e^ξ představuje $(n+1)$ -ní derivaci funkce f v bodě ξ , která bude určitě menší než e^b , což je konstanta, kterou označíme k . A také platí, že každý člen $|x - x_0|, |x - x_1|, \dots, |x - x_n|$ bude menší nebo roven délce intervalu $\langle a, b \rangle$. Takže platí

$$|R(x)| \leq \frac{e^b}{(n+1)!} \cdot (b-a)^{n+1} = \frac{k \cdot (b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pokud bychom byli schopni ukázat, že limita výrazu $\frac{k \cdot (b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ bude nulová, tak chyba bude konvergovat k nule (dokonce stejnoměrně na intervalu $\langle a, b \rangle$). K ověření použijeme podílové kritérium konvergence řady a nutnou podmínku konvergence řady (viz [4])

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{k \cdot (b-a)^{n+2}}{(n+2)!}}{\frac{k \cdot (b-a)^{n+1}}{(n+1)!}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k \cdot (b-a)^{n+2}}{k \cdot (b-a)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)^{n+2}}{(b-a)^{n+1}} \cdot \frac{1}{n+2} = \\ &= (b-a) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Protože limita vyšla menší než 1, tak platí, že

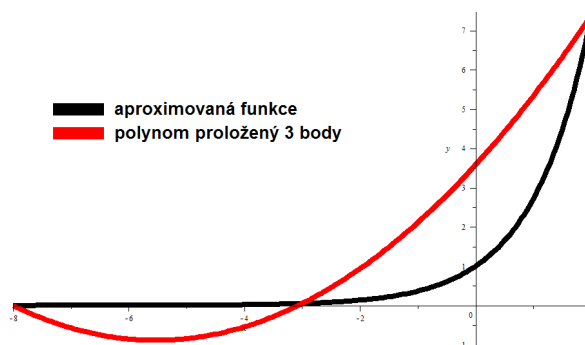
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k \cdot (b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ konverguje.}$$

A pak podle nutné podmínky konvergence platí, že

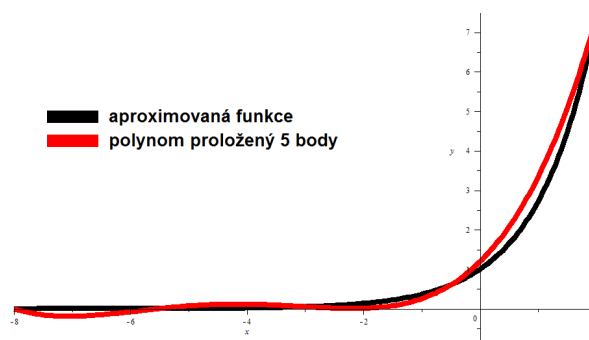
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k \cdot (b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Poznámka 3.1 Podobně by šlo ukázat, že i pro funkce $\sin ax$, $\cos ax$, e^{ax} , kde $a \in \mathbb{R}$ se to bude vždy chovat „dobře“. Na otázku, proč tomu tak je, nám odpovídá věta o chybě Lagrangeova interpolačního polynomu (viz věta 3.1). Pokud se podíváme na tvar předpisu pro tuto chybu, zjistíme, že zde figuruje derivace. Ta je právě příčinou toho, zda chyba při zvyšujícím se počtu uzlů půjde k nule nebo naopak bude narůstat. Jinými slovy, pokud obecně n -tá derivace zadané funkce bude „dobrého“ charakteru, tak se také chyba aproximace bude při zhušťování sítě zmenšovat. Je to způsobeno tím, že čitatel (viz (14)) v případě „pěkných“ funkcí má exponenciální růst a jmenovatel faktoriální růst. Jak jsme si ukázali, faktoriál nám „přebije“ exponenciálu a tím pádem se bude chyba postupně blížit nule.

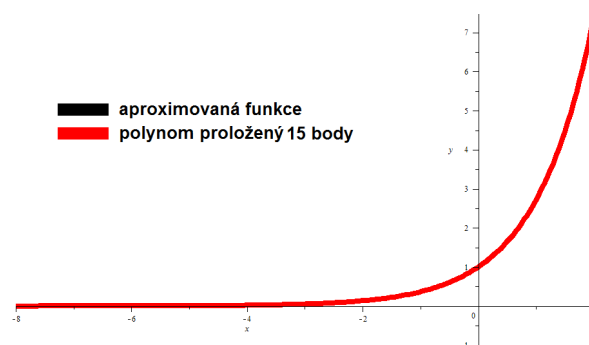
Pro ilustraci jsou na následujících obrázcích uvedeny grafy aproximované funkce $f(x) = e^x$ na intervalu $\langle -8, 2 \rangle$ postupně se sítí 3 bodů (obrázek 9), 5 bodů (obrázek 10) a 15 bodů (obrázek 11).



Obrázek 9: Aproximace funkce $f(x) = e^x$ na síti o 3 bodech



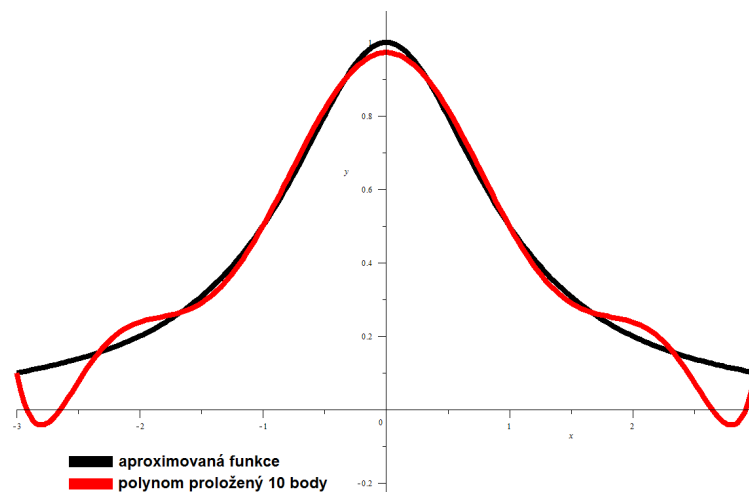
Obrázek 10: Aproximace funkce $f(x) = e^x$ na síti o 5 bodech



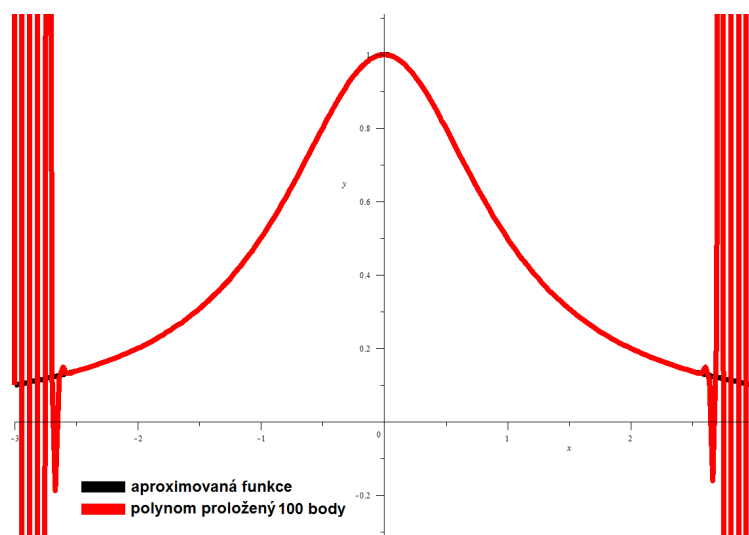
Obrázek 11: Aproximace funkce $f(x) = e^x$ na síti o 15 bodech

Jak si lze všimnout, pokud u této funkce budeme sít' bodů zhušťovat, tak se skutečně budeme postupně blížit aproximované funkci.

Bohužel ne každá funkce má takové chování, což si ukážeme na následujících obrázcích, kde je funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ aproximovaná na intervalu $\langle -3, 3 \rangle$ tentokrát se sítí 10 bodů (obrázek 12) a 100 bodů (obrázek 13).

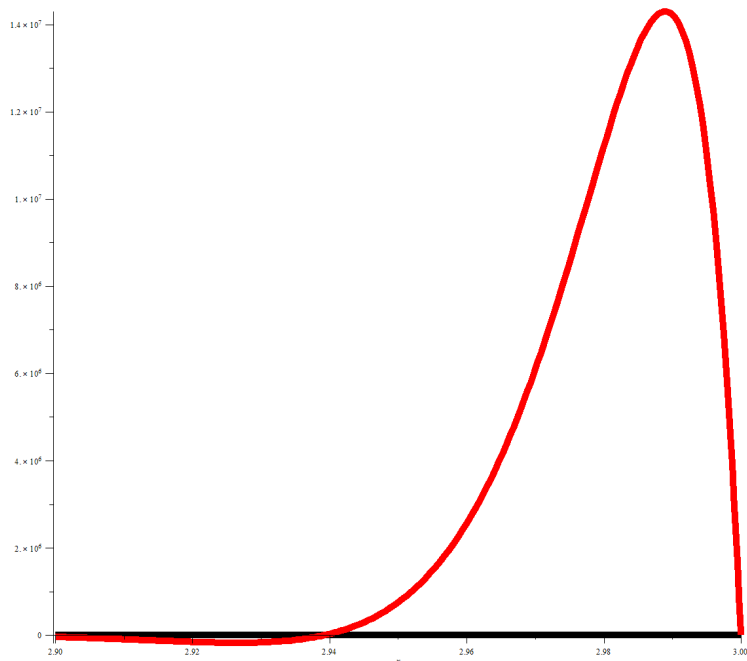


Obrázek 12: Aproximace funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ na sítí o 10 bodech



Obrázek 13: Aproximace funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ na sítí o 100 bodech

Z obrázků vidíme, že i když síť bodů zhušťujeme (dokonce až na 100 bodů), tak se přesto nepřibližujeme k aproximované funkci na požadovaném intervalu. Naopak zde dochází k velkým oscilacím a dá se očekávat, že zvyšováním počtu uzlů, budeme naopak chybu zvětšovat. Na následujícím obrázku (obrázek 14) je zobrazeno, jak vysokého řádu dosahují oscilace. Pokud bychom navýšili počet uzlů až na 600, oscilace by vzrostly až do řádu $2 \cdot 10^{55}$, což je obrovské číslo.



Obrázek 14: Oscilace až do řádu $1,4 \cdot 10^7$ na síti o 100 bodech

Poznámka 3.2 Čím blíže budeme u kraje intervalu, na kterém aproximujeme, tím budou oscilace větší.

4 Závěr

Cílem této práce bylo seznámit se s různými typy polynomiálních aproximací funkcí. Uvedli jsme aproximaci pomocí Taylorova polynomu, kde jsme si ukázali, že Taylorův polynom je skutečně lepší k aproximaci funkce na okolí bodu než jakýkoli jiný polynom téhož řádu. Odvodili jsme několik předpisů pro chybu při aproximaci (např. Lagrangeův či Cauchyův tvar zbytku), neboť každé vyjádření této chyby se dá využít u jiné aplikace Taylorova polynomu. Příkladem mohl být důkaz, že číslo e je iracionální, kde jsme využili právě Lagrangeův tvar zbytku. Následovalo využití Taylorova polynomu při aproximaci funkcí, kde jsme např. spočítali Eulerovo číslo s požadovanou přesností. Ukázali jsme si, že u některých funkcí docílíme poměrně „přesné“ aproximace, nicméně existují i funkce, které nejsou příliš vhodné k aproximaci Taylorovým polynomelem. Příčinou toho, proč tomu tak je, je špatné chování n -té derivace. Další zajímavou aplikací byl výpočet limit pomocí Taylorova polynomu. Ne vždy lze použít l'Hospitalovo pravidlo, případně po jeho aplikaci dostaneme zlomek ještě složitější. Díky Taylorovu polynomu dokážeme limity počítat jiným způsobem, a dokonce můžeme dojít k výsledku rychleji.

Druhým typem polynomu, o kterém jsme v této práci hovořili, byl Lagrangeův interpolační polynom. I v tomto případě je důležité zabývat se chybou aproximace. Zkoumali jsme chování aproximací při postupném zhušťování sítě bodů a dívali se, jaké je chování u různých typů funkcí. Zjistili jsme, že u funkcí jejichž derivace mají exponenciální růst, se chyba bude postupně zmenšovat, budeme-li tuto síť bodů zhušťovat. Naopak, budou-li mít derivace této funkce faktoriální růst, tak dopředu nedokážeme s jistotou říci, zda se chyba zmenší. Lagrangeův interpolační polynom je tedy vhodný k aproximaci pouze některých funkcí, neboť zde může dojít k obrovským oscilacím při postupném zhušťování sítě bodů právě vlivem špatného chování derivací.

5 Literatura

- [1] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet (I)*. Praha: Academia, 1984.
- [2] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet (II)*. Praha: Academia, 1984.
- [3] BOUCHALA, Jiří. *Matematická analýza ve Vesmíru*, [online]. [cit. 2013-02-09].
Dostupné z WWW:
http://homel.vsb.cz/~bou10/MA_pro_IT/9.pdf.
- [4] BOUCHALA, Jiří - VODSTRČIL, Petr. *Řady*, [online]. [cit. 2013-05-02].
Dostupné z WWW:
http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/rady_tisk.pdf.